

제3교시



2013학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지

수리영역

이과

성명		수험번호							
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--

- 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공군사관학교

관
망

1. $\sqrt[6]{9^5} \times 24^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ 3

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(2x - \pi)^2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

3. 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는? [2점]

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{5}{4}$

③ -1

④ $-\frac{3}{4}$

⑤ $-\frac{1}{2}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ 의 값은? [3점]

① $\pi + 1$

② $\pi + 2$

③ $\pi + 3$

④ $\pi + 4$

⑤ $\pi + 5$

5. 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의로 25 개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 \bar{X} 라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $P(48 \leq \bar{X} \leq 54)$ 의 값을 구한 것은? [3점]

- ① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

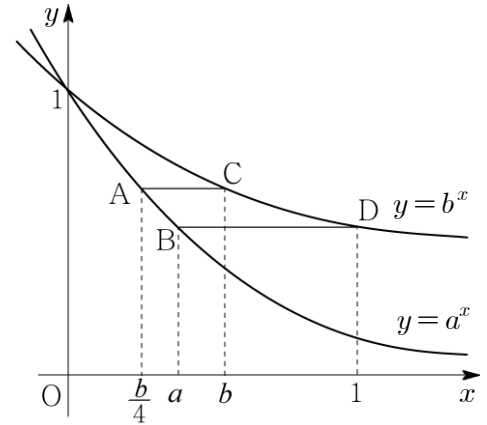
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10 개를 정회원 2 명, 준회원 2 명에게 모두 나누어 주려고 한다. 정회원은 2 개 이상, 준회원은 1 개 이상을 받도록 나누어 주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

- ① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

7. 그림과 같이 $0 < a < b < 1$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 위의 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $\frac{b}{4}, a$ 이고, 곡선 $y = b^x$ 위의 두 점 C, D의 x 좌표는 각각 $b, 1$ 이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x 축과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{16}$
 ② $\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{9}{16}$
 ④ $\frac{5}{8}$
 ⑤ $\frac{11}{16}$



8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t 년 후에 이 동물의 개체 수를 N 이라 하면 등식

$$\log N = k + t \log \frac{4}{5} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n 년 후이다. 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 행렬 $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $A(1, 2)$ 가 옮겨지는 점을 B , 행렬 M^3 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $C(2, 0)$ 이 옮겨지는 점을 D 라 하자. 두 벡터 \overrightarrow{OB} 와 \overrightarrow{BD} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [3점]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 두 실수 x, y ($x > y$)가 $x+y=1$, $xy=-1$ 을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_n = \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항을 구하는 과정이다.

$x+y=1$, $xy=-1$ 에서 두 실수 x, y 는 방정식

$$t^2 - t + \boxed{\text{(가)}} = 0$$

의 두 근이다. 한편

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \quad \dots\dots(*) \end{aligned}$$

(*)은 첫째항이 x^{n-1} 이고 공비가 $\frac{y}{x}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$a_n = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{\sqrt{5}}$$

위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $m + \{f(3)\}^2$ 의 값은?
[3점]

① 17

② 19

③ 21

④ 23

⑤ 25

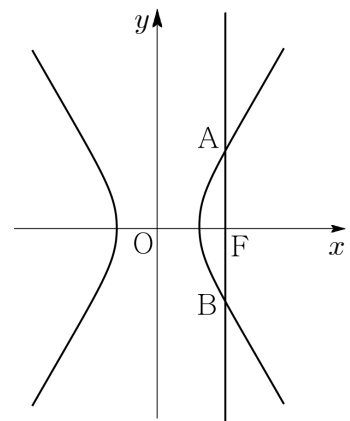
11. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F 를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B 라 하자.

$\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [3점]

- ① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점 $F(c, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. $\overline{AB} = \sqrt{2}c$ 일 때, a 와 b 사이의 관계식은? (단, $a > 0, b > 0, c > 0$) [3점]

- ① $a = b$
 ② $a = \sqrt{2}b$
 ③ $2a = 3b$
 ④ $a = \sqrt{3}b$
 ⑤ $a = 2b$



13. 모든 실수 x 에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sin 2x + 4\sin x - 4\cos x + 1$$

의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

- ① $4 - 4\sqrt{2}$ ② $4 - 3\sqrt{2}$ ③ $4 - 2\sqrt{2}$
 ④ $5 - 2\sqrt{2}$ ⑤ $5 - \sqrt{2}$

14. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t) dt$ 에 대하여 직선 $y = 6x - k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에

접할 때, 양수 k 의 값은? [3점]

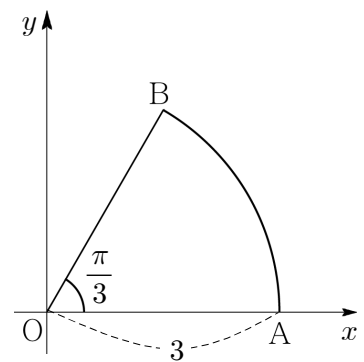
- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

15. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O 와 점 $A(3, 0)$ 을 잇는 선분 OA 를 반지름으로 하고 중심각의

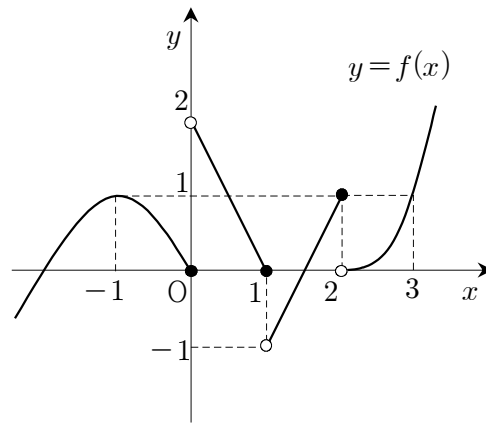
크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$ 일 때, 일차변

환 f 에 의하여 부채꼴 OAB 가 옮겨진 도형을 D 라 하자. 도형 D 의 내부와 부채꼴 OAB 의 내부의 공통부분을 나타내는 도형을 E_1 이라 하고, 일차변환 f 에 의하여 도형 E_1 이 옮겨진 도형을 E_2 라 하자. 두 도형 E_1, E_2 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1 + S_2$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{8}\pi$
- ② $\frac{7}{16}\pi$
- ③ $\frac{1}{2}\pi$
- ④ $\frac{9}{16}\pi$
- ⑤ $\frac{5}{8}\pi$



16. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

————— <보 기> —————

- ㄱ. 함수 $f(x-1)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C 가 $(AB)^2 = A^2B^2$, $BA = AC$ 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

————— <보 기> —————

ㄱ. $B^2A = AC^2$

ㄴ. B 의 역행렬이 존재하면 $A^2B = A^2C$ 이다.

ㄷ. AC 의 역행렬이 존재하면 $B = C$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

————— <보 기> —————

ㄱ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 의 값이 존재한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

19. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

————<보 기>————

ㄱ. $f(x) \geq 0$

ㄴ. $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2 - 2\ln 2$ 이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{(\ln x)^6}{x^2}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것

은? (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^6}{x^2} = 0$ 이다.) [4점]

— <보 기> —

ㄱ. $x = e^3$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $x = e$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $x > 0$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ

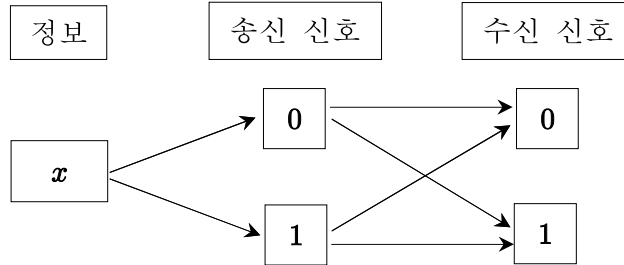
② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림은 어떤 정보 x 를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



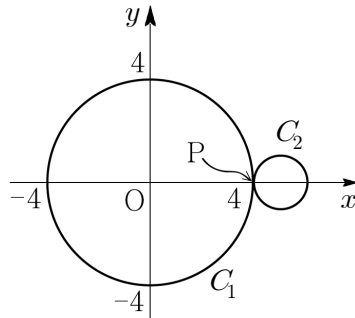
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

- (가) 정보 x 가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6이다.
 (나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다.
 (다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

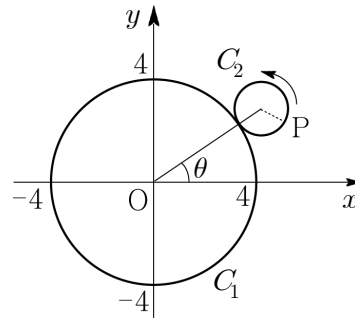
정보 x 를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

- ① $\frac{54}{59}$ ② $\frac{55}{59}$ ③ $\frac{56}{59}$ ④ $\frac{57}{59}$ ⑤ $\frac{58}{59}$

22. [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1 과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2 가 점 $(4, 0)$ 에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2 가 원 C_1 에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. θ 의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$ 까지 변할 때, 점 $(4, 0)$ 에서 출발한 점 P가 움직인 거리는? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1 = 0$, $b_1 = 2$

(나) n 이 짝수이면 $a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n}$, $b_n = b_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{n}$ 이다.

(다) n 이 1 보다 큰 홀수이면 $a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n}$, $b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n}$ 이다.

$a_{41} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 79

② 80

③ 81

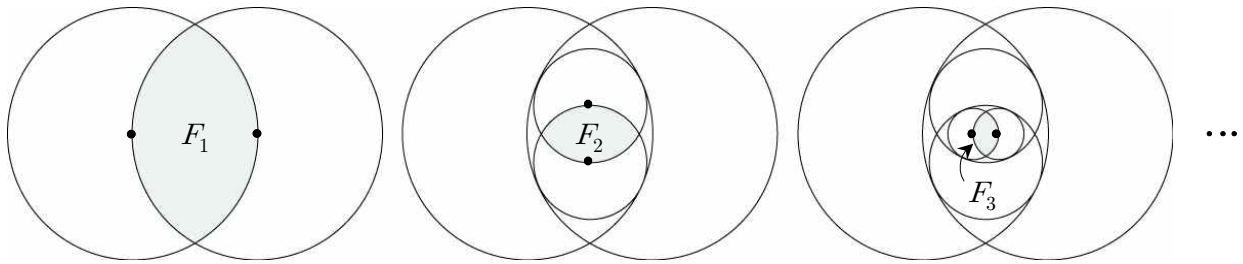
④ 82

⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1 이라 하자.

F_1 의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1 과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2 라 하자.

F_2 의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2 와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3 이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n 을 그려 나갈 때, F_n 의 둘레의 길이를 l_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]

① $2\pi(1 + \sqrt{7})$

② $\frac{8\pi}{3}(1 + \sqrt{7})$

③ $\frac{4\pi}{3}(2 + \sqrt{7})$

④ $2\pi(2 + \sqrt{7})$

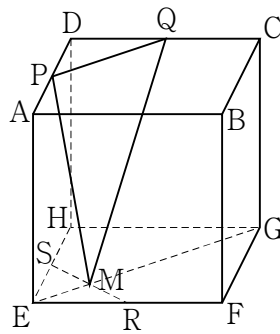
⑤ $\frac{5\pi}{3}(2 + \sqrt{7})$

25. 분수방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-12} = \frac{2}{5}$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

26. 좌표공간 위의 점 $A(4, 6, 7)$ 에서 두 점 $B(1, -1, 2)$, $C(5, -3, 8)$ 을 지나는 직선까지의 거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하시오. [3점]

27. 두 곡선 $y = \ln x + 3$, $y = \ln \frac{1}{x} + 3$ 과 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 V 이다. $\frac{V}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같은 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 네 모서리 AD , CD , EF , EH 의 중점을 각각 P , Q , R , S 라 하고, 두 선분 RS 와 EG 의 교점을 M 이라 하자. 평면 PMQ 와 평면 $EFGH$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan^2 \theta + \sec^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제 n 행에 n 자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n=1, 2, 3, \dots$)

제 1 행	1
제 2 행	10, 11
제 3 행	100, 101, 110, 111
제 4 행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
...	...

제 n 행에 나열한 모든 수의 합을 a_n 이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 21$, $a_3 = 422$ 이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{20^n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $g(1)=2$

(나) 모든 실수 x , y 에 대하여 $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ 이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\} dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

관
망